

# **שלשות פתגוריות פרימיטיביות עם יתר שעוקב לניצב הגדול**

## **תוכן הענינים**

- 1- שלשות פתגוריות עם יתר שעוקב לניצב הגדול.**
- 2- הדרך למציאת הנוסחה :יתר שעוקב לניצב הגדול**
- 3- נוסחת הסכום של היתר והניצב הגדול**
- 4-הוכחת נוסחת הסכום של היתר והניצב הגדול**
- 5-טיפול במערכת שוויונים אינסופית של ריבועי טבעיים עוקבים**
- 6-הפורמט הכללי של שלשות פתגוריות עם סיומות (5,12,13)**
- 7-מציאת שלשות פתגוריות שבהן:הניצב הקטן נמצא בסוף ספרות היתר.**

**עורך: דן-1**

**תאריך: 20-8-2014.**

### 1- שלשות פתגוריות עם יתר שעוקב לניצב הגדול.

השלשות הפתגוריות המפורסמות ביותר שרובנו זוכרים בעל פה במספרים טבעיים הן:

(3,4,5) (5,12,13) וגם (7,24,25).

למעשה אלו הן שלשות שמקיימות את משפט פתגורס שהמחלק המשותף הגדול שלהן הוא: 1 כי לא ניתן לצמצם את איברי השלשה במספר טבעי  $K$  כאשר  $K < 1$ .

אבל יש לשלשות המפורסמות הנ"ל מאפיין נוסף שבו נעסוק בכתבה זאת.

היתר (המספר הגדול בשלשה) בכל אחת מהשלשות גדול בדיוק ב-1 מהניצב הגדול (המספר הזוגי האמצעי בשלשה). למעשה במילים אחרות היתר בשלשות אלו עוקב אחרי הניצב הגדול.

הנוסחה להפקת שלשות כנ"ל תהיה  $(A,B,C)$  עבור:  $T \geq 3$

כאשר  $T$  מספר טבעי ואי זוגי הם:

$$A=T$$

$$B=0.5 (T^2-1)$$

$$C=0.5 (T^2-1)+1$$

### סיכום: תצורת השלשה עבור $T$ טבעי ואי זוגי

לכל:  $T \geq 3$

|                                   |
|-----------------------------------|
| $(T, 0.5 (T^2-1), 0.5 (T^2-1)+1)$ |
|-----------------------------------|

## 2- הדרך למציאת הנוסחה :יתר שעוקב לניצב הגדול

נציין שהנוסחה בעמוד קודם ליצירת שלשה פתגורית פרימיטיבית עם יתר שעוקב אחרי הניצב הגדול מתקבלת כאשר מבצעים את ההצבה הבאה:

$$m=n+1, \quad T=2n+1, \quad n=1,2,3,\dots$$

בתבנית הפתגורית ה"קלאסית":

$$(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$$

תבנית זאת מקיימת את משפט פתגורס (שלשה פתגורית) כאשר מתקיים:

$$\gcd(m,n)=1$$

## 3- נוסחת הסכום של היתר והניצב הגדול

נבחן תופעה נוספת שמתקיימת בשלושת פתגוריות שבהן היתר עוקב אחרי הניצב הגדול.

אם נתונה שלשה פתגורית בצורת  $(A,B,C)$  במספרים טבעיים, נקבל שבנוסף לקשר הפתגורי:  $A^2+B^2=C^2$  אם  $C=B+1$  אז  $B+C=A^2$ .

**כלומר הסכום של הניצב הגדול והיתר שווה בדיוק לריבוע הניצב הקטן !**

ואומנם אם נבדוק למשל את השלושת המפורסמות ביותר שהן למעשה פרימיטיביות והיתר עוקב לניצב הגדול תקבל:

$$(3,4,5) \Rightarrow 4+5=3^2$$

$$(5,12,13) \Rightarrow 12+13=5^2$$

$$(7,24,25) \Rightarrow 24+25=7^2$$

ואגב אם נסמן באות  $H$  את היקף המשולש שבו היתר עוקב לניצב הגדול, והניצב הקטן  $A$

$$H=A+B+C=A+A^2=A(A+1) \quad \text{נקבל תוצאה מעניינת:}$$

## 4- הוכחת נוסחת הסכום של היתר והניצב הגדול

מדובר על מקרה שבו היתר עוקב לניצב הגדול.

$$\text{כלומר נתון כי: } C=B+1.$$

$$\text{לפי משפט פתגורס: } C^2=A^2+B^2$$

$$\text{כלומר; (*) = לפי הנתון } C-B=1 \quad \text{ולכן} \quad A^2=C^2-B^2=(C-B)(C+B)=1 \cdot (C+B) \quad \text{מ.ש.ל.}$$

### 5-טיפול במערכת שוויונים אינסופית של ריבועי טבעיים עוקבים

אם נבחן שלשה פתגורית במספרים טבעיים, שהיתר עוקב לניצב הגדול נקבל תופעה שמסבירה את השוויון הבא, שיתכן והקורא כבר פגש בו בעבר.

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 \quad \text{השוויון הוא:}$$

**אפשר לראות כי השוויון הזה נוצר מהשלשה הפתגורית המפורסמת: (5, 12, 13).**

**-הניצב הקטן (5) הוא מספר המספרים הטבעיים המשתתפים בשוויון.**

**-הניצב הגדול (12) נמצא משמאל לסימן השוויון (=).**

**-היתר (13) נמצא מימין לסימן השוויון (=).**

ובצורה כללית נקבל: (וניתן להוכיח זאת באינדוקציה):

עבור השלשה הפתגורית שבה היתר עוקב לניצב הגדול מתקיים  $(A, B, B+1)$

$$0.5(A-1) = \text{מספר המחוברים מימין לסימן השוויון.}$$

$$0.5(A-1) + 1 = \text{מספר המחוברים משמאל לסימן השוויון.}$$

$$0.5(A^2 - 1) = \text{האיבר משמאל לשוויון שהוא הניצב הגדול בשלשה הפתגורית. } B =$$

$$0.5(A^2 - 1) + 1 = \text{האיבר מימין לשוויון שהוא היתר בשלשה הפתגורית. } B+1 =$$

סה"כ מספר המחוברים  $A =$  הניצב הקטן בשלשה הפתגורית  $A =$

A הוא מספר טבעי ואי זוגי. כל המחוברים הם טבעיים עוקבים.

לפי האמור לעיל נקבל עבור  $A=3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots$

$$(3, 4, 5) \rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$(5, 12, 13) \rightarrow 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$(7, 24, 25) \rightarrow 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

$$(9, 40, 41) \rightarrow 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$

$$(11, 60, 61) \rightarrow 55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$$

$$(13, 84, 85) \rightarrow 78^2 + 79^2 + 80^2 + 81^2 + 82^2 + 83^2 + 84^2 = 85^2 + 86^2 + 87^2 + 88^2 + 89^2 + 90^2$$

$$(15, 112, 113) \rightarrow 105^2 + 106^2 + 107^2 + 108^2 + 109^2 + 110^2 + 111^2 + 112^2 = 113^2 + 114^2 + 115^2 + 116^2 + 117^2 + 118^2 + 119^2$$

וכך ניתן להמשיך את השלשות הפתגוריות שבהן היתר עוקב לניצב הגדול ולקבל

### אינסוף שוויונים של טבעיים עוקבים.

נביא כאן רק הסכומים של השוויונים הנ"ל : (מסומנים בכחול)

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| $(3,4,5) \rightarrow$      | 25    |
| $(5,12,13) \rightarrow$    | 365   |
| $(7,24,25) \rightarrow$    | 2030  |
| $(9,40,41) \rightarrow$    | 7320  |
| $(11,60,61) \rightarrow$   | 19855 |
| $(13,84,85) \rightarrow$   | 45955 |
| $(15,112,113) \rightarrow$ | 94220 |

.

.

.

### 6-הפורמט הכללי של שלשות פתגוריות עם סיומות (5,12,13)

נדון כעת במקרה הפרטי שבו יש לנו שלשה פתגורית עם יתר עוקב לניצב הגדול וגם מתקיים:

-הספרות האחרונות של היתר הן:13

-הספרות האחרונות של הניצב הגדול הן:12

-הספרה האחרונה של הניצב הקטן הן:5

אם נציב  $T=10N-5$  בנוסחה של סעיף 1(מסומנת בצהוב) עבור שלשה פתגורית עם יתר עוקב לניצב הגדול שהיא:

$$(T, 0.5 (T^2-1), 0.5 (T^2-1)+1)$$

עבור  $N=1,2,3,4,5,6,...,n$  נקבל  $T=5,15,25,35,45,55,...,10n-5$

נייצר את השלשות הפרימיטיביות בהתאם לנוסחה הנ"ל המסומנת בצהוב.:

$(5,12,13)$   $(15,112,113)$   $(25,312,313)$   $(35,612,613)$   $(45,1012,1013)$   $(55,1512,1513)$ ....

ובצורה כללית ובפורמט שמוכיח בעליל את המבנה היחודי של השלשות הפתגוריות נקבל:

$$\dots(10(n-1)+5, \frac{1}{2} \cdot 100n(n-1)+12, \frac{1}{2} \cdot 100n(n-1)+13)$$

ובצורה כזאת קבלנו אינסוף שלשות עם יתר עוקב לניצב, ועם סיומת ספרות שזהה לשלשה מפורסמת (5,12,13).

7-מציאת שלשות פתגוריות שבהן:הניצב הקטן נמצא בסוף ספרות היתר.

אם נבדוק שלשות פתגוריות שבהן **היתר עוקב לניצב הגדול** בתחום שבו מתקיים:

$$1001 \leq \text{הניצב הקטן} \leq 21$$

נקבל את השלשות הפתגוריות הבאות:

| ניצב קטן | ניצב גדול | יתר    |
|----------|-----------|--------|
| 21       | 220       | 221    |
| 41       | 840       | 841    |
| 61       | 1860      | 1861   |
| 81       | 3280      | 3281   |
|          |           |        |
| 101      | 5100      | 5101   |
| 201      | 20200     | 20201  |
| 301      | 45300     | 45301  |
| 401      | 80400     | 80401  |
| 501      | 125500    | 125501 |
| 601      | 180600    | 180601 |
| 701      | 245700    | 245701 |
| 801      | 320800    | 320801 |
| 901      | 405900    | 405901 |
| 1001     | 501000    | 501001 |

מהטבלה עולה (הספרות מסומנות באדום) שהניצב הקטן נמצא בסוף ספרות היתר.

#### הערות:

1-נשאר לקוראים להראות שיש דרך קלה למצוא אינסוף שלשות כנ"ל גם מעבר לתחום שעברו הוגדרה הטבלה.

2-נציין שמספר טבעי שמופיע בסוף ריבועו נקרא: "אוטמורפי", ולכן אולי כדאי להגדיר כאן שהניצב הקטן הוא "אוטמורפי ליתר" כי הוא מופיע בשלמות בסוף היתר.

