

מוכיחים: הפסנתר האי-רציונלי

שכבת גיל

חטיבת ביניים – כיתה ט'

חטיבה עליונה – כיתה י'

תקציר הפעילות

בסרטון שבפעילות נראה כי הבעיה בכיוון פסנתר נובעת מתכונת האי-רציונליות של מספר מסוים. בפעילות זו נוכיח את הטענה, תוך כדי תרגול גישת ההוכחה בדרך השלילה. פעילות זו יכולה לעמוד בפני עצמה, או כהמשך לפעילות "חוקרים: למה אי אפשר לכונן פסנתר".

משך הפעילות

שיעור בודד

מטרת הפעילות

להוכיח את תכונת האי-רציונליות של שורש מסדר 12 של 2.

מושגים מתוכנית הלימודים

מספרים אי-רציונליים, הוכחה בדרך השלילה

מיומנויות

בניית טיעון, חשיבה ביקורתית

אופי הלמידה

יחידים

זוגות

סוג הפעילות

פעילות לסיכום הנושא

קישור לסרטון

- “Why it's impossible to tune a piano”: <https://bit.ly/30lqzzD>

מה עושים?

1) צפו בסרטון "מדוע אי אפשר לכוון פסנתר" שבקישור <https://bit.ly/30lqzzD>. בסוף הסרטון מופיעה הטענה שהמרווח שמשתמשים בו לכיוון פסנתר, $\sqrt[12]{2}$, לא יכול להתקבל מיחסים בין מספרים שלמים – כלומר אינו רציונלי. מדוע זה נכון? בפעילות זו נוכיח את הטענה.

2) תחילה נזכר במושג "מספר רציונלי": זהו מספר שאפשר לכתוב כיחס בין שני מספרים שלמים. מהגדרה זו נובע כי לכל מספר רציונלי יש דרכים רבות לכתוב אותו. מדוע זה נכון? תנו דוגמה למספר רציונלי שיכול להיכתב בדרכים שונות.

הרחבה של שבר שומרת על ערך המספר. למשל $1/2 = 4/8$.

3) נשתמש בשיטת הוכחה בדרך השלילה. ראשית נראה כיצד עובדת שיטת ההוכחה הזו. לתהליך יש ארבעה שלבים:
א. מניחים שהטענה שרוצים להוכיח דווקא **אינה** נכונה.
ב. מסיקים מסקנות. אם הטענה אינה נכונה – מה זה אומר? אם כן, מה חייב להיות נכון?
ג. ממשיכים בהסקת המסקנות עד שמגיעים לסתירה: מסקנה לא הגיונית.
ד. מכיוון שהגענו לסתירה, סימן שנקודת המוצא שלנו לא נכונה. לכן **לא ייתכן** שהטענה שהתחלנו ממנה לא נכונה – כלומר היא חייבת להיות נכונה.

4) נראה דוגמה להוכחה פשוטה בדרך השלילה. נוכיח שיש אין-סוף מספרים טבעיים (שלמים וגדולים מאפס).

א. אנחנו מניחים שלא נכון ש _____ . יש אין-סוף מספרים טבעיים

ב. אם זה באמת לא נכון, מה חייב להיות נכון?

קיים מספר טבעי "הגדול ביותר".

ג. מדוע זה מוביל אותנו למסקנה בלתי אפשרית?

כי תמיד נוכל להוסיף 1 לאותו מספר "הגדול ביותר" ולקבל אחד גדול יותר.

ד. מכיוון שהגענו לסתירה, סימן שנקודת המוצא שלנו לא נכונה. לכן **לא ייתכן ש** _____ קיים

מספר טבעי "הגדול ביותר" – כלומר _____ . יש אין-סוף מספרים טבעיים

5) כעת נוכיח כי $\sqrt[12]{2}$ הוא לא מספר רציונלי. לשם כך נשתמש בתכונה חשובה של מספרים רציונליים: יש אומנם דרכים רבות לכתוב מספר רציונלי בצורת שבר כפי שראינו, אולם רק דרך אחת לעשות זאת על ידי **שבר מצומצם**, שנסמן a/b .

שלב א': ניסוח ההנחה: נניח שלא נכון שהמספר $\sqrt[12]{2}$ הוא אי-רציונלי.

שלב ב':

אם כן, מה חייב להיות נכון? היעזרו בתכונות המספרים הרציונליים ושהשלימו את המשוואה:

$$\sqrt[12]{2} = \left(\frac{a}{b}\right)^{??} \quad \sqrt[12]{2} = \left(\frac{a}{b}\right)^{12}$$

פשטו את המשוואה כך שבכל אגף יופיע נעלם אחד בלבד ולא יופיעו בה שורשים:

נעלה את המשוואה בחזקת 12 ונעביר אגפים: $2b^{12} = a^{12}$

הסבירו מדוע a^{12} חייב להיות זוגי? כי הוא שווה לשתיים כפול משהו שלם.

אם a^{12} הוא זוגי, מה זה אומר על a עצמו? a גם חייב להיות זוגי, אחרת חזקה של אי-זוגי הייתה נשארת אי-זוגית. עכשיו נחזור ל- a^{12} . במה המספר הזה חייב להתחלק? לא רק ב-2, אלא למעשה ב-2 בחזקת 12.

שלב ג': מציאת הסתירה

כעת חזרו למשוואה שכתבתם, והסיקו מסקנה לגבי b . $2b^{12}$ צריך להתחלק ב-2 12 פעמים. לכן b חייב להיות זוגי. מדוע זה מוביל לסתירה? מכיוון שעכשיו a/b הוא לא שבר מצומצם.

שלב ד': מכיוון שהגענו לסתירה, הטענה המקורית חייבת להיות נכונה. מדוע?

בכל פעם שנניח שקיים שבר מצומצם ל $\sqrt[12]{2}$ נגיע לאותה הסתירה. לכן לא קיים שבר כזה, ולכן זה לא מספר רציונלי.