

מוכיחים: הפסנתר האי-רציונלי

מטרת הפעילות

להוכיח את תכונת האי-רציונליות של שורש מסדר 12 של 2.

מושגים מתוכנית הלימודים

מספרים אי-רציונליים, הוכחה בדרך השלילה

מיומנויות

בניית טיעון, חשיבה ביקורתית

מה עושים?

1) צפו בסרטון "[מדוע אי אפשר לכוון פסנתר](https://bit.ly/30lqzzD)" שבקישור <https://bit.ly/30lqzzD>. בסוף הסרטון מופיעה הטענה שהמרווח שמשתמשים בו לכיוון פסנתר, $\sqrt[12]{2}$, לא יכול להתקבל מיחסים בין מספרים שלמים – כלומר אינו רציונלי. מדוע זה נכון? בפעילות זו נוכיח את הטענה.

2) תחילה ניזכר במושג "מספר רציונלי": זהו מספר שאפשר לכתוב כיחס בין שני מספרים שלמים. מהגדרה זו נובע כי לכל מספר רציונלי יש דרכים רבות לכתוב אותו. מדוע זה נכון? תנו דוגמה למספר רציונלי שיכול להיכתב בדרכים שונות.

3) נשתמש בשיטת הוכחה בדרך השלילה. ראשית נראה כיצד עובדת שיטת ההוכחה הזו. לתהליך יש ארבעה שלבים:
א. מניחים שהטענה שרוצים להוכיח דווקא **אינה** נכונה.
ב. מסיקים מסקנות. אם הטענה אינה נכונה – מה זה אומר? אם כן, מה חייב להיות נכון?
ג. ממשיכים בהסקת המסקנות עד שמגיעים לסתירה: מסקנה לא הגיונית.
ד. מכיוון שהגענו לסתירה, סימן שנקודת המוצא שלנו לא נכונה. לכן **לא ייתכן** שהטענה שהתחלנו ממנה לא נכונה – כלומר היא חייבת להיות נכונה.

4) נראה דוגמה להוכחה פשוטה בדרך השלילה. נוכיח שיש אין-סוף מספרים טבעיים (שלמים וגדולים מאפס).

- א. אנחנו מניחים שלא נכון ש _____.
- ב. אם זה באמת לא נכון, מה חייב להיות נכון?
- ג. מדוע זה מוביל אותנו למסקנה בלתי אפשרית?
- ד. מכיוון שהגענו לסתירה, סימן שנקודת המוצא שלנו לא נכונה. לכן **לא ייתכן** ש _____ – כלומר _____.

5) כעת נוכיח כי $\sqrt[12]{2}$ הוא לא מספר רציונלי. לשם כך נשתמש בתכונה חשובה של מספרים רציונליים: יש אומנם דרכים רבות לכתוב מספר רציונלי בצורת שבר כפי שראינו, אולם רק דרך אחת לעשות זאת על ידי **שבר מצומצם**, שנסמן a/b .

שלב א': ניסוח ההנחה:

שלב ב':

אם כן, מה חייב להיות נכון? היעזרו בתכונות המספרים הרציונליים ושהשלימו את המשוואה:

$$\sqrt[12]{2} = \left(\frac{??}{??}\right)^{??}$$

פשטו את המשוואה כך שבכל אגף יופיע נעלם אחד בלבד ולא יופיעו בה שורשים:

הסבירו מדוע a^{12} חייב להיות זוגי?

אם a^{12} הוא זוגי, מה זה אומר על a עצמו?

עכשיו נחזור ל- a^{12} . במה המספר הזה חייב להתחלק?

שלב ג': מציאת הסתירה

כעת חזרו למשוואה שכתבתם, והסיקו מסקנה לגבי b .

מדוע זה מוביל לסתירה?

שלב ד': מכיוון שהגענו לסתירה, הטענה המקורית חייבת להיות נכונה. מדוע?