

צביעת מפות: בעיית ארבעת הצבעים

שכבת גיל

חטיבת ביניים – כיתות ז' – ט'
חטיבה עליונה – כיתות י' – י"ב

תקציר הפעילות

זוהי פעילות העשרה, שבה נחקור אם יש מספר צבעים שמספיק לצביעה של כל מפה מדינית, ויהיה מספר המדינות בה אשר יהיה, כך שכל שתי מדינות בעלות קו גבול משותף תהיינה צבועות בשני צבעים שונים. נדון גם בבעיה הזאת, וגם, בין היתר, בהבדלים בין השערה להוכחה. בפעילות זו התלמידים ישחקו בזוגות ויתנסו בצביעה של מפות שונות גם באמצעות יישומון.

משך הפעילות

שיעור אחד – שניים

מטרות הפעילות

- לחשוף את עבודתם וחשיבתם של מתמטיקאים שמתחילה בהעלאת שאלה, ממשיכה בניסוח הנחה לפתרון, ועוברת דרך ניסיונות להוכיח את ההנחה או להפריכה.
- להכיר את "בעיית ארבעת הצבעים", ואת פתרונה הייחודי שמהווה פריצת דרך להוכחות באמצעות מחשב.
- להבהיר את ההבדלים בין השערה ובין הוכחה במתמטיקה.

מושגים מתוכנית הלימודים

תורת הגרפים, לוגיקה, הוכחה, השערה, תרשימים

מיומנויות

חשיבה ביקורתית, יצירתיות, פתרון בעיות וקבלת החלטות, שיתוף פעולה

אופי הלמידה

יחידים, זוגות, כיתתי

סוג הפעילות

פעילות להקניית הנושא

שאלת עמ"ר (ערכים, מעורבות, רלוונטיות)

· רלוונטיות

קישורים לסרטונים ולכתבות

הסרטון הבא:

· סרטון סיכום רעיון ההוכחה של משפט ארבעת הצבעים: <https://bit.ly/3aamJmT>

כל אחת מהכתבות הבאות:

· הרחבה על הוכחת משפט ארבעת הצבעים: <https://bit.ly/3a7zDlk>

· כתבה מאתר דוידסון על שימוש בגרפים לפתרון בעיית ארבעת הצבעים: <https://bit.ly/33FKW2X>

הכנות לקראת הפעילות

· לבקש מהתלמידים להביא מראש ארבעה צבעים ודפי טיוטה.

· לדאוג למקורן לצפייה בסרטון במליאה.

· לדאוג שיהיה נייד סלולרי אחד לזוג לפחות.

· להדפיס את [נספח המפות להדפסה](#) כמספר זוגות תלמידים בכיתה.

· יישומון אינטראקטיבי של צביעת מפות: <https://www.geogebra.org/m/pjPgJdhV>

מה עושים?

חלק א': צובעים את אירופה

עבדו בזוגות. לפניכם מפה של מרכז אירופה:



איור: ויקיפדיה

עליכם לצבוע את המדינות לפי הכלל הבא:
אסור לצבוע שתי מדינות בעלות קו גבול משותף באותו הצבע.

שימו לב, בשלב זה אין מגבלה על מספר הצבעים. אפשר להשתמש במספר צבעים הזהה למספר המדינות.

בכמה צבעים השתמשתם?

מומלץ להציג דוגמאות מעבודותיהם, לכלל הכיתה. בשלב זה מקבלים את כל התשובות האפשריות. אין לשבח את התלמידים שהשתמשו במס' מינימלי של צבעים.

חפשו בגוגל או בכל אמצעי אחר: מהי "מפה מדינית"? נסחו במילים שלכם.
תרשים המראה את המדינות, גודלן, צורתיהן וגבולותיהן. המפה המדינית מציגה את החלוקה של האזור שמוצג בה, בין המדינות השונות. כל מדינה מקבלת צבע משלה, שנועד להבחין בינה למדינות אחרות בסביבתה.

מומלץ לצפות בסרטון "ההיסטוריה של אירופה" שבקישור הבא: <https://bit.ly/3NCc5rr>.
הסרטון מראה מפה מדינית עם ההיסטוריה של אירופה החל מ-400 שנה לפני הספירה עד 2017.
אם אין זמן להראות את כל הסרטון, מומלץ להתעכב רק על הדקה האחרונה.

חלק ב': צובעים את אפריקה

התבוננו במפה של אפריקה:



איור: wikimedia commons

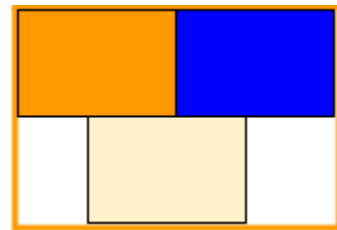
נחשו: כמה צבעים לדעתכם נזדקק כדי לצבוע מפה זו? יש להקפיד כמובן לשמור על הכלל שניסחנו קודם, ולפיו אי אפשר לצבוע באותו צבע שתי מדינות בעלות גבול משותף.
מספר הצבעים: _____

תוכלו לבצע הצבעה בכיתה, ולכתוב את הניחושים השונים על הלוח. אם יהיו תלמידים שיאמרו שמספיקים ארבעה צבעים אין להתייחס לכך באופן שונה מהצעות אחרות, ולכתוב הצעה זו כמו כל הצעה אחרת. בשלב זה נרצה כביכול לחזק את התחושה האינטואיטיבית שלהם, שכל עוד המפה עם גבולות רבים יותר – עברנו ממפה של מרכז אירופה עם מעט גבולות למפה של כל אפריקה – כך כמות הצבעים צריכה להיות גדולה יותר. בהמשך נראה כי תחושה זו שגויה.

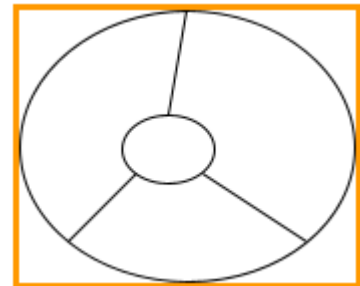
1. מתמטיקאים מנסים להגיע להכללה בבעיות שונות שנתקלים בהן. לדעתכם, איזו שאלה מעניינת אפשר לחקור בנושא זה של צביעת מפות בכמות צבעים מסוימת?
ניתן כמובן לקבל מגוון רחב של הצעות לשאלות ולבסוף להתמקד בסוגיה הזו: האם יש מספר כלשהו של צבעים שיספיק לצביעת כל מפה, כך שכל שתי מדינות בעלות קו גבול משותף תהיינה בשני צבעים שונים? ואם כן, מהו המספר הכי קטן?

2. כעת ננסה להגיע להכללה ולעשות קצת סדר:

- האם יש מפה שלצביעתה מספיקים שני צבעים? אם כן נסו ליצור מפה כזו.
כמובן שיש מפה כזאת, לוח שחמט למשל או הצעות שונות שתלמידים יוכלו לגשת ולצייר.
- האם יש מפה שאי אפשר לצבוע בשני צבעים ולצביעתה הכרחי להשתמש בשלושה צבעים? אם כן נסו ליצור מפה כזו.
גם כאן ישנם מפות כאלו, כמו השרטוט המצורף כאן. ניתן לבקש מתלמידים לגשת ללוח ולצייר.



- האם יש מפה שאי אפשר לצבוע בשלושה צבעים, ושלצביעתה הכרחי להשתמש בארבעה צבעים? אם כן נסו ליצור מפה כזו.
גם כאן ישנן מפות שלצביעתן הכרחי שימוש בארבעה צבעים, כמו בשרטוט המצורף. ניתן לבקש מהתלמידים לנסות לצבוע שרטוט זה בפחות מארבעה צבעים.



- האם יש מפה שאי אפשר לצבוע בארבעה צבעים, ושלצביעתה הכרחי להשתמש בחמישה צבעים? אם כן נסו ליצור מפה כזו.
לאחר שהתלמידים חושבים שהצליחו, אפשר ליצור מפה כזו לבקש מהם להחליף מפה עם חבריהם לשולחן. כל אחד מבני הזוג ינסה לצבוע את מפת חברו בפחות מחמישה צבעים.

חלק ג': משחק ראשון בזוגות

שחקו בזוגות משחק אינטראקטיבי של צביעת מפות.

היכנסו לקישור הבא: <https://www.geogebra.org/m/pjPgJdhV>.

יש לשלוח לתלמידים לטלפון הנייד את הקישור, מומלץ שיעבדו יחד בזוגות עם טלפון נייד אחד לטובת שיח משותף והתייעצות.

על כל תלמיד לצבוע בנפרד על פי הכלל הבא: אסור לצבוע שני אזורים בעלי קו גבול משותף באותו הצבע.
מי מנצח? מי שמסיים לצבוע את כל השדות לפי הכללים.

שימו לב, כי לחיצה חוזרת על אזור מסוים תחליף את צבעו מתוך ארבעה צבעים. הצבעים שבהם השתמשו הם: ירוק, כחול, סגול, אדום.
לסיכום המשחק, ענו על השאלות הבאות:

1. לכמה צבעים מזקתם? 4 צבעים
2. האם מישהו הצליח לצבוע בשלושה צבעים בלבד?
אי אפשר לצבוע את המפה הזו ספציפית בשלושה צבעים. כמובן שישנן מפות אחרות שאפשר לצבוע בשלושה צבעים.
3. האם למישהו לא הספיקו ארבעת הצבעים ונזקק לצבע חמישי?
ייתכן שתלמידים מסוימים לא יצליחו להשלים את המשימה ויאמרו שאי אפשר לעשותה, אלא אם כן נותנים להם עוד צבע: אך כשיראו שחבריהם כן הצליחו, תפיסה זו תשתנה עבורם.
4. האם לדעתכם ישנה מפה שאי אפשר לצבוע בארבעה צבעים והכרחי צבע חמישי?
על השאלה הזאת ננסה לענות כעת עם הכיתה.

במאה ה-19 פרנסיס גת'רי (Guthrie), מתמטיקאי ובוטנאי דרום-אפריקאי, העלה את ההשערה שאפשר כנראה לצבוע כל מפה בארבעה צבעים בלבד. אפשר לדבר עם התלמידים על ההבדל בין השערה שנובעת מניסיונות רבים שנעשו לעומת הוכחה שאין עליה עוררין.

במשך 120 שנה ניסו להוכיח שארבעה צבעים מספיקים לצבוע כל מפה. לאורך תקופה זו הוכיחו שבודאי שלושה צבעים אינם מספיקים, ואף הצליחו להראות שחמישה צבעים מספיקים: אך לארבעה צבעים בלבד היו רק הוכחות חלקיות ולא שלמות. בשלב זה לא הייתה הוכחה, אך גם לא הייתה הפרכה שהדבר לא אפשרי. כלומר לא נמצאה מפה שאי אפשר לצבוע בארבעה צבעים.

רק בשנת 1976 נמצאה ההוכחה. שני מתמטיקאים אמריקאים, וולפגנג האקן (Haken) וקנט אפל (Apple). הם כמובן התבססו על ההוכחות שנעשו לאורך עשרות השנים שקדמו להם, אך בשונה מבעבר הם עשו זאת בלי טעויות כלל. הדבר המעניין הוא שההוכחה לא הייתה מתמטית במובן המקובל, כי את החלק העיקרי שלה ביצע המחשב. ולא רק זאת, אלא שמשפט ארבעת הצבעים היה המשפט המתמטי הראשון שהוכח באמצעות מחשב. פתרון זה בעזרת המחשב שינה לגמרי את משמעות המושג "הוכחה מתמטית".

תוכלו לקרוא כאן עוד על ההיסטוריה של הוכחת המשפט: <https://bit.ly/3a7zDlk>.

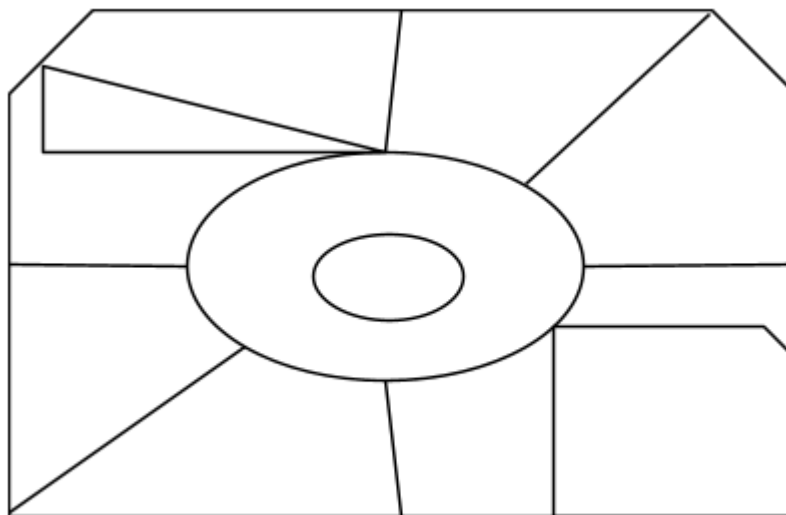
בקישור הבא תוכלו לצפות בסרטון המסביר את רעיון ההוכחה של צביעת מפות בארבעה צבעים ואופן המרת שרטוטי מפות לתרשים המתאר רשת קשרים: <https://bit.ly/3aamJmT>.

לסרטון אין כתוביות בעברית. אם נוצר קושי, אפשר לחלופין לקרוא את הכתבה מאתר דוידסון:
"שימוש בגרפים לפתרון בעיית ארבעת הצבעים": <https://bit.ly/33FKW2X>.

חלק ד': משחק שני בזוגות

- מספר המשתתפים: שני משתתפים.
- כללי המשחק: כל אחד מהמשתתפים מקבל שני צבעים שונים.
- כל שחקן בתורו בוחר באחד הצבעים וצובע חלק אחד במפה, לפי בחירתו.
- יש לשמור על הכלל הבא: אסור לצבוע באותו הצבע חלקים שיש להם גבול משותף.
- סיום המשחק: כאשר אחד השחקנים לא יכול לבצע מהלך צביעה חוקי, ולכן הוא מפסיד במשחק.

ניתן להציע לתלמידים ליצור מפות נוספות משלהם ואז לשחק.



מפת אירופה:



איור: ויקיפדיה

מפת אפריקה:



איור: wikipedia commons

