

צביעת מפות: בעיית ארבעת הצבעים

מטרות הפעילות

- לחשוף את עבודתם וחשיבתם של מתמטיקאים שמתחילה בהעלאת שאלה, ממשיכה בניסוח הנחה לפתרון, ועוברת דרך ניסיונות להוכיח את ההנחה או להפריכה.
- להכיר את "בעיית ארבעת הצבעים", ואת פתרונה הייחודי שמהווה פריצת דרך להוכחות באמצעות מחשב.
- להבהיר את ההבדלים בין השערה ובין הוכחה במתמטיקה.

מושגים מתוכנית הלימודים

תורת הגרפים, לוגיקה, הוכחה, השערה, תרשימים

מיומנויות

חשיבה ביקורתית, יצירתיות, פתרון בעיות וקבלת החלטות, שיתוף פעולה

מה עושים?

חלק א': צובעים את אירופה

עבדו בזוגות. לפניכם מפה של מרכז אירופה:



איור: ויקיפדיה

עליכם לצבוע את המדינות לפי הכלל הבא:
אסור לצבוע שתי מדינות בעלות קו גבול משותף באותו הצבע.

בכמה צבעים השתמשתם?

חפשו בגוגל או בכל אמצעי אחר: מהי "מפה מדינית"? נסחו במילים שלכם.

מומלץ לצפות בסרטון "ההיסטוריה של אירופה" שבקישור הבא: <https://bit.ly/3NCc5rr>.
הסרטון מראה מפה מדינית עם ההיסטוריה של אירופה החל מ-400 שנה לפני הספירה עד 2017.

חלק ב': צובעים את אפריקה

התבוננו במפה של אפריקה:



אזור: wikimedia commons

נחשו: כמה צבעים לדעתכם נזדקק כדי לצבוע מפה זו? יש להקפיד כמובן לשמור על הכלל שניסחנו קודם, ולפיו אי אפשר לצבוע באותו צבע שתי מדינות בעלות גבול משותף. מספר הצבעים: _____

1. מתמטיקאים מנסים להגיע להכללה בבעיות שונות שנתקלים בהן. לדעתכם, איזו שאלה מעניינת אפשר לחקור בנושא זה של צביעת מפות בכמות צבעים מסוימת?

2. כעת ננסה להגיע להכללה ולעשות קצת סדר:

· האם יש מפה שלצביעתה מספיקים שני צבעים? אם כן נסו ליצור מפה כזו.

· האם יש מפה שאי אפשר לצבוע בשני צבעים ולצביעתה הכרחי להשתמש בשלושה צבעים? אם כן נסו ליצור מפה כזו.

· האם יש מפה שאי אפשר לצבוע בשלושה צבעים, ושלצביעתה הכרחי להשתמש בארבעה צבעים? אם כן נסו ליצור מפה כזו.

· האם יש מפה שאי אפשר לצבוע בארבעה צבעים, ושלצביעתה הכרחי להשתמש בחמישה צבעים? אם כן נסו ליצור מפה כזו.

חלק ג': משחק ראשון בזוגות

שחקו בזוגות משחק אינטראקטיבי של צביעת מפות.

· היכנסו לקישור הבא: <https://www.geogebra.org/m/pjPgJdhV>.

· על כל תלמיד לצבוע בנפרד על פי הכלל הבא: אסור לצבוע שני אזורים בעלי קו גבול משותף באותו הצבע.

· מי מנצח? מי שמסיים לצבוע את כל השדות לפי הכללים.

שימו לב, כי לחיצה חוזרת על אזור מסוים תחליף את צבעו מתוך ארבעה צבעים. הצבעים שבהם השתמשו הם: ירוק, כחול, סגול, אדום.
לסיכום המשחק, ענו על השאלות הבאות:

1. לכמה צבעים נזקקתם?

2. האם מישהו הצליח לצבוע בשלושה צבעים בלבד?

3. האם למישהו לא הספיקו ארבעת הצבעים ונזקק לצבע חמישי?

4. האם לדעתכם ישנה מפה שאי אפשר לצבוע בארבעה צבעים והכרחי צבע חמישי?

במאה ה-19 פרנסיס גת'רי (Guthrie), מתמטיקאי ובוטנאי דרום-אפריקאי, העלה את ההשערה שאפשר כנראה לצבוע כל מפה בארבעה צבעים בלבד.

במשך 120 שנה ניסו להוכיח שארבעה צבעים מספיקים לצבוע כל מפה. לאורך תקופה זו הוכיחו שבחודאי שלושה צבעים אינם מספיקים, ואף הצליחו להראות שחמישה צבעים מספיקים: אך לארבעה צבעים בלבד היו רק הוכחות חלקיות ולא שלמות. בשלב זה לא הייתה הוכחה, אך גם לא הייתה הפרכה שהדבר לא אפשרי. כלומר לא נמצאה מפה שאי אפשר לצבוע בארבעה צבעים.

רק בשנת 1976 נמצאה ההוכחה. שני מתמטיקאים אמריקאים, וולפגנג האקן (Haken) וקנט אפל (Apple). הם כמובן התבססו על ההוכחות שנעשו לאורך עשרות השנים שקדמו להם, אך בשונה מבעבר הם עשו זאת בלי טעויות כלל. הדבר המעניין הוא שההוכחה לא הייתה מתמטית במובן המקובל, כי את החלק העיקרי שלה ביצע המחשב. ולא רק זאת, אלא שמשפט ארבעת הצבעים היה המשפט המתמטי הראשון שהוכח באמצעות מחשב. פתרון זה בעזרת המחשב שינה לגמרי את משמעות המושג "הוכחה מתמטית".

תוכלו לקרוא כאן עוד על ההיסטוריה של הוכחת המשפט: <https://bit.ly/3a7zDlk>.

בקישור הבא תוכלו לצפות בסרטון המסביר את רעיון ההוכחה של צביעת מפות בארבעה צבעים ואופן המרת שרטוטי מפות לתרשים המתאר רשת קשרים: <https://bit.ly/3aamJmT>.

חלק ד': משחק שני בזוגות

- מספר המשתתפים: שני משתתפים.
- כללי המשחק: כל אחד מהמשתתפים מקבל שני צבעים שונים.
- כל שחקן בתורו בוחר באחד הצבעים וצובע חלק אחד במפה, לפי בחירתו.
- יש לשמור על הכלל הבא: אסור לצבוע באותו הצבע חלקים שיש להם גבול משותף.
- סיום המשחק: כאשר אחד השחקנים לא יכול לבצע מהלך צביעה חוקי, ולכן הוא מפסיד במשחק.

