

מקפלים את דרכנו אל הירח: חזקות

שכבת גיל

חטיבת ביניים – כיתה ז'-ט'

תקציר הפעילות

בפעילות זו יתנסו התלמידים בקיפול נייר ויצירת שכבות זו על גבי זו. התלמידים יחקרו את הקשר לפעולת החזקה ויבינו את ההשפעה המשמעותית של פעולת החזקה על מספרים חיוביים. בנוסף לכך יבדקו אם יש מגבלה לכמות הקיפולים האפשריים, וכמה קיפולים נצטרך לעשות עד שנגיע לירח. הפעילות היא פעילות העשרה שמדגישה את חשיבות ההצדקות במתמטיקה כשהאינטואיציה מטעה אותנו.

משך הפעילות

שיעור אחד-שניים

מטרות הפעילות

- להבין את המשמעות של פעולת החזקה ולחזק הבנה זו.
- לבסס את חשיבות המתמטיקה במקרים שבהם האינטואיציה מטעה.
- להשתמש בכתיב חזקות לקיצור פעולת כפל חוזרת (מעריך טבעי).

מושגים מתוכנית הלימודים

חזקות, מעריך טבעי, חוקי חזקות, גידול מעריכי, בניית ביטוי אלגברי, מציאת חוקיות

מיומנויות

הבניית ידע, חשיבה ביקורתית, יישום ידע, פתרון בעיות וקבלת החלטות, רפלקטיביות לתהליך הלמידה, שיתוף פעולה

אופי הלמידה

יחידים

זוגות

סוג הפעילות

פעילות להקניית הנושא

קישור לסרטון

כל אחד מהסרטונים הבאים:

· "איך תקפלו את דרככם אל הירח": <https://bit.ly/1w01dGQ>

הכנות לקראת הפעילות

- לקרוא את הכתבה "איך תקפלו את דרככם אל הירח": <https://bit.ly/2y5LeyN> לפני הפעילות עם התלמידים.
- להכין דפי A4.
- לדאוג למקור להקרנת הסרטון והכתבה.

מה עושים?

- (1) קחו דף נייר וקפלו אותו לחצי כך שיהיו שתי שכבות של נייר זו על זו. אחר כך קפלו שוב את הכול לחצי וכן הלאה. כמה פעמים הצלחתם לקפל אותו? כמה שכבות של נייר נוצרו? שערו: כמה פעמים אפשר לקפל פיסת נייר לשניים, שוב ושוב? מרבית התלמידים יגיעו לשבעה קיפולים: ייתכן שחלקם יגיעו עד לשמונה קיפולים.
- (2) נתבונן בצד המתמטי: דף A4 סטנדרטי אורכו כ-300 מ"מ (30 ס"מ) ועוביו כ-0.05 מ"מ. כאשר יש לפניכם דף כזה, אחרי קיפול אחד אורכו יהיה 150 מ"מ ועוביו 0.1 מ"מ. השלימו: אחרי קיפול שני באותו כיוון אורכו של הדף יהיה _____ 75 מ"מ ועוביו _____ 0.2 מ"מ.
- (3) בהנחה שאין לנו מגבלה בכמות קיפולים, ושנוכל לקפל את הנייר כמה פעמים שנרצה, מה יהיה עובי הנייר אחרי מספר הקיפולים הבא?
קיפול שלישי: עובי _____ 0.4 מ"מ.
קיפול שמיני: עובי _____ 12.8 מ"מ.
קיפול 11: עובי _____ 102.4 מ"מ = _____ 10.24 ס"מ.
שערו: מה יהיה לדעתכם עובי הנייר אחרי 30 קיפולים (כתבו את המספר בתוספת 2 ספרות לאחר הנקודה)?
כל תשובה לגיטימית. המטרה היא לראות את הסתירה בין האינטואיציה ובין התוצאה האמיתית בשלב מאוחר יותר.
זכרו לכתוב יחידות מידה!
- (4) נסו למצוא נוסחה שתקשר בין העובי ההתחלתי של הנייר ובין העובי אחרי n קיפולים:
בכל פעם העובי גדל פי 2, אז בעצם בכל פעם מכפילים את העובי ההתחלתי ב-2 כמספר הקיפולים: עובי אחרי n קיפולים יהיה $2^n \cdot 0.05$.
- (5) צפו בסרטון שמדגים כמה קיפולי נייר נדרשים כדי להגיע לירח. קישור לסרטון: <https://bit.ly/1w01dGQ>.
שימו לב שבסרטון העובי ההתחלתי של הנייר שאותו מקפלים הוא 0.01 מ"מ, פי 5 יותר דק מהנייר שבו השתמשנו! כיצד לדעתכם תיראה הנוסחה כעת? _____ $2^n \cdot 0.01$



איור: Max pixel

6) א. בסרטון מחקר המושג "גידול מעריכי" (דקה 2:42). גידול כזה מתאר קצב שינוי מהיר במיוחד, שבו הכמות ההתחלתית גדלה באחוז קבוע מדי שעה, יום או שנה. קיימות כמה תכונות של גידול מעריכי, שהופכות את הטיפול בבעיות שגדלות בקצב מעריכי לקשות במיוחד. למשל, הוגים רבים בזרם הקיימות חוששים שבעיות עולמיות שונות, בתחומים כמו גידול אוכלוסין, זיהום, ניצול משאבי טבע או ניצול אנרגיה, יציבו אתגר גדול מדי לאנושות. ההוגים חושבים כך בגלל תכונות של גידול מעריכי שעשויות להיות לבעיות אלה. נסו להסביר מדוע ישנו חשש שכזה.

גדילה בצריכת משאבים לנפש הרגל, הרס מערכות אקולוגיות, הכחדת מינים או צריכת משאבים מתכלים עלולים להיות בעלי צמיחה מעריכית. באוכלוסיית חיידקים, שמרים או חרקים בתוך בית גידול מבודד המכיל מזון אין גורמים מגבילים כמו טורפים או מחלות. לאוכלוסייה יש קצב גידול קבוע, המספק זמן הכפלה כלשהו. לאחר כל מחזור הכפלה גדלה האוכלוסייה פי 2. דבר זה נמשך עד שלבסוף האוכלוסייה מגיע לפיצוץ אוכלוסין שבעקבותיו היא גועת ברעב או מרעילה את עצמה למוות בגלל חומרי פסולת שמצטברים בבית הגידול.

ב. נוכל להראות עוד דוגמה לגידול מעריכי על ידי חידה קצרה:

ישנה כוס ובתוכה חיידק. החיידק מתרבה כל שנייה פי 2, למשל 1, 2, 4. לחיידקים לוקח 60 שניות למלא את הכוס במלואה. כמה זמן ייקח להם למלא רק חצי מהכוס?

59 שניות. בשנייה שלפני מילוי הכוס החיידקים מילאו חצי כוס; מכיוון שכל שנייה קצב הגדילה הוא פי 2, אז מייד לאחר השנייה 59 – כלומר בשנייה ה-60 – הכוס מתמלאת לגמרי. עם תלמידי כיתות ט' ניתן לדבר על הפרבולה שהם מכירים כדוגמה לגידול מעריכי.

7) בסעיף 1 ניסיתם לקפל את הנייר לחצי כמה שיותר פעמים. האם יש לדעתכם גבול למספר הפעמים האפשריות, אם נשתמש בסוג נייר אחר או באמצעי עזר כלשהם? כדי לענות על שאלה זו, קראו את הסיפור על ג'ריטני ג'ליון:

<https://bit.ly/2y5LeyN>

מדובר בשאלה פתוחה: אין ציפייה להגיע לתשובות חד-משמעיות עם התלמידים. השאלה מובאת כגירוי לקריאת הכתבה על גליון, ששברה מוסכמות בכך שהצליחה לקפל מעבר למה שחשבו עד אותה העת. מקרה זה משאיר פתח תיאורטי לכך שאפשר לבצע עוד קיפולים מעבר למה שגליון הצליחה, אף על פי שבאופן ישים הדבר קשה מאוד.